



Concursul de fizică generală pentru studenții în inginerie "Ion I Agarbiceanu"

Ediția a X-a, 20 aprilie 2019

Proba teoretică, Secțiunea Fizică II

1. Într-un recipient vidat cu pereții menținuți la o temperatură apropiată de zero absolut se află o bilă de cupru de rază $r = 6 \cdot 10^{-3}$ m și de temperatură inițială $T_0 = 300$ K. Considerând suprafața bilei drept un corp negru, să se determine timpul τ după care temperatura sa scade de $n = 2$ ori. Se cunoaște densitatea cuprului, $\rho = 8900 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, căldura specifică a cuprului, $c_{\text{Cu}} = 390 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ și constanta Stefan-Boltzmann, $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$.

P.O.

Legea

1.2 p.

$$M = \sigma T^4 = \frac{dP_e}{dS}$$

2.4 p.

conduce la:

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{dE}{dt} = -\frac{mc_{\text{Cu}}dT}{dt} = -\frac{4}{3}\pi r^3 \rho c_{\text{Cu}} \frac{dT}{dt} \Rightarrow dt = -\frac{1}{3}r\rho \frac{c_{\text{Cu}}}{\sigma} T^{-4} dT. \\ P_e &= S\sigma T^4 = 4\pi r^2 \sigma T^4 \\ \tau &= -\frac{1}{3} \frac{r\rho c_{\text{Cu}}}{\sigma} \int_{\frac{T_0}{n}}^{T_0} T^{-4} dT = \frac{1}{9} \frac{r\rho c_{\text{Cu}}}{\sigma T_0^3} (n^3 - 1) \cong 2,939 \text{ h.} \end{aligned}$$

2.4 p.

2. O groapă de potențial unidimensională cu pereții înfiniți se întinde între $x = 0$ și $x = a$. Funcțiile proprii ortonormate ale energiei sunt

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

O particulă de masă m se găsește echiprobabil doar în jumătatea din stânga a gropii. Dacă se măsoară energia particulei, care este probabilitatea de a găsi valoarea corespunzătoare stării fundamentale? Dar a primei stări excitate? În ce stări de energie nu se poate găsi particula?

P.O.

12' p.

Pentru $0 < x < a/2$ funcția de undă este $\psi = A$, unde A este o constantă. Impunând condiția de normare asupra funcției de undă

$$\int_0^{a/2} |A|^2 dx = 1$$

12' p.

se obține

$$|A| = \sqrt{2/a}.$$

12' p.

Condițiile la frontieră sunt respectate dacă se consideră că în $x = 0$ și în $x = a/2$ funcția de undă scade brusc la zero. Va trebui să dezvoltăm această funcție după setul ortonormat al funcțiilor proprii ale energiei, iar modulul pătrat al coeficienților dezvoltării reprezintă chiar probabilitățile de apariție ale diverselor valori proprii ale energiei. Atunci

$$\psi = \sum_n C_n \varphi_n(x),$$

12' p.

iar coeficienții dezvoltării se determină din produsele scalare

$$C_m = (\varphi_m, \psi) = \int_0^{a/2} \varphi_m^* \psi dx = \frac{2}{a} \int_0^{a/2} \sin \frac{m\pi x}{a} dx = \frac{2}{m\pi} \left(1 - \cos \frac{m\pi}{2} \right)$$

24' p.

Pentru a găsi particula în starea fundamentală, trebuie să considerăm coeficientul C_1 , deci pentru $m = 1$. Astfel,

$$C_1 = \frac{2}{\pi},$$

12' p.

iar probabilitatea cerută este

$$P_1 = |C_1|^2 = \frac{4}{\pi^2} \cong 0,4053.$$

12' p.

Analog,

$$P_2 = |C_2|^2 = \frac{4}{\pi^2} \cong 0,4053$$

12' p.

iar $P_n = 0 \Rightarrow n = 4k, k \in \mathbb{N}^*$.

12' p.

3. Clorura de sodiu formeaza cristale cubice cu patru atomi de Na si patru atomi de Cl per cub. Masele atomice ale Na si Cl sunt 23.0, respectiv 35.5. Densitatea $NaCl$ este 2.16 g/cm^3 .

(a) Calculati lungimea de unda cea mai mare pentru care razele X se mai pot reflecta Bragg.

(b) Pentru razele X cu lungimea de unda de $4\text{\AA}$, determinati numarul de reflexii Bragg si unghiul corespunzator fiecareia.

Rezolvare

Clorura de sodiu formeaza cristale cubice cu patru atomi de Na si patru atomi de Cl per cub. Masele atomice ale Na si Cl sunt 23.0, respectiv 35.5. Densitatea $NaCl$ este 2.16 g/cm^3 .

(a) Calculati lungimea de unda cea mai mare pentru care razele X se mai pot reflecta Bragg.

(b) Pentru razele X cu lungimea de unda de $4\text{\AA}$, determinati numarul de reflexii Bragg si unghiul corespunzator fiecareia.

IV.R.

(a) Fie V volumul celulei unitate, N_A numarul lui Avogadro, iar ρ densitatea lui $NaCl$. Atunci

$$V\rho N_A = 4(23.0 + 35.5),$$

si

$$V = 4 \times \frac{58.5}{2.16 \times 6.02 \times 10^{23}} = 1.80 \times 10^{-22} \text{ cm}^3,$$

iar lungimea laturii celulei unitate cubice

$$d = \sqrt[3]{V} = 5.6 \times 10^{-8} \text{ cm} = 5.6\text{\AA}.$$

Conform ecuatiei Bragg, $2d\sin\theta = n\lambda$, adica

$$\lambda_{\max} = 2d = 11.2\text{\AA}.$$

(b) Pentru $\lambda = 4\text{\AA}$,

$$\sin\theta = \frac{\lambda n}{2d} = 0.357n.$$

Rezulta ca

$$\text{pentru } n=1: \sin\theta=0.357, \theta = 20.9^\circ$$

$$\text{pentru } n=2: \sin\theta=0.714, \theta=45.6^\circ$$

Pentru $n \geq 3$: $\sin\theta > 1$, si reflexia Bragg nu este permisa.

4. Folosindu-se modelul atomic Bohr,

(a) Gasiti expresia nivelurilor de energie pentru ionul He^+ .

(b) Calculati energiile starii cu $l=1$ intr-un camp magnetic, neglijand spinul electronului.

Rezolvare

(a) Fie r raza orbitei electronului, iar v viteza sa. Conform modelului Bohr, momentul sau cinetic orbital L este cuantificat

$$L = mvr = n\hbar. \quad (n = 1, 2, 3 \dots)$$

Forța centripetă este forța de atracție Coulombiană,

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Deci, energia He^+ este

$$E_n = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{1}{2}mv^2 = -\frac{2me^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 n^2 \hbar^2}$$

(b) Aria orbitei electronului este

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{r}{2} \cdot r d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^T r^2 \omega dt = \frac{L}{2m} T,$$

unde $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, viteza unghiulară, este dată de $L = mr^2\omega$, iar T este perioada mișcării circulare. Pentru $l = 1$, $L = \hbar$ iar momentul magnetic al electronului datorat mișcării orbitale este

$$\mu = IA = -\frac{e}{T} A = -\frac{e\hbar}{2m},$$

unde I este curentul electric produs de mișcarea orbitală a electronului. Energia care apare din interacția stării cu $l = 1$ și un câmp magnetic B este

$$\Delta E = -\mu \cdot B = \begin{cases} \frac{e\hbar}{2m}, & (\mu \parallel B) \\ 0, & (\mu \perp B) \\ -\frac{e\hbar}{2m}, & (\mu \parallel -B) \end{cases}$$

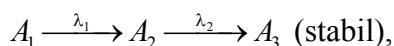
5. Doi prieteni, Steve și Dave, observă într-o seară în apropierea ariei de mare securitate națională numită *Zona 51*, un aparat de zbor aflat în vrie însoțit de o escortă de avioane militare de luptă. Cum pe posturile naționale de știri și în mass-media nu a apărut nicio informație sau referire la acel eveniment, cei doi se hotărăsc să facă investigații proprii, atât cât le permite legea. Cu ajutorul unui detector de radiații cu cristal de NaI activat cu Talu, cei doi fac măsurători dintr-un loc situat cât mai aproape de zona în care căzuse aparatul de zbor aflat în vrie și constată că activitatea radioactivă este de $n = 65.46$ ori mai mare decât cea găsită într-o hartă radioactivă a ținutului. Steve și Dave presupun că obiectul zburător aflat în cădere avea propulsie nucleară. Cei doi fac măsurători sporadice, dar se constată că după 3 luni activitatea se apropiase foarte mult de cea a fondului radioactiv natural, fiind doar de $m = 1.359$ mai mare decât cea a fondului radioactiv. Să se

demonstreze că din măsurătorile celor doi rezultă ca obiectul aflat în cădere era o navă de origine extraterestră.

Barem rezolvare:

- din oficiu1.0 p
- fie Λ_F activitatea fondului radioactiv natural. Această activitate rămâne relativ constantă în timp, pe perioade lungi de timp1.0 p
- fie $\Lambda(t)$ activitatea la momentul t a unui fragment din materialul radioactiv de la bordul navei1.0 p
- activitatea acestuia variază în timp conform legii: $\Lambda(t) = \Lambda_0 \exp\left(-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t\right)$ 3.0 p
- particularizand pentru $t = 0$ și $t = 0.25$ ani rezultă:
 - $\Lambda(0) = \Lambda_0 = n\Lambda_F$ 1.0 p
 - $\Lambda(0.25) = \Lambda_0 \exp\left(-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot 0.25\right) = m\Lambda_F$ 1.5 p
- din ultimele două relații rezultă $\ln\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot 0.25$ 0.5 p
- perioada de înjumătățire a radionuclidului este $T_{1/2} = 0.25 \cdot \frac{\ln 2}{\ln(n/m)} = 16.32$ zile0.5 p
- radionuclidul nu există în mod natural pe pământ, el fiind produs prin reacții nucleare la bordul navei. Tehnologia navei depășește tehnologia terestră actuală.0.5 p

6. Un radioizotop A_1 suferă un lanț de transformări radioactive decurgând după schema:



unde λ_1 și λ_2 sunt constantele de dezintegrare ale transformărilor respective, între care există relația $\lambda_2 = 2\lambda_1$. La momentul $t_0 = 0$ existau numai N_{01} nuclee radioactive ale radioizotopului A_1 . Timpul de înjumătățire al radioizotopului A_1 fiind $T_1 = 58$ zile, să se determine:

- a) După cât timp de la momentul inițial numărul de nuclee ale radioizotopului A_1 este egal cu numărul de nuclee ale radioizotopului A_3 ;
- b) Ce procent din numărul de nuclee inițiale N_{01} reprezintă numărul de nuclee ale radioizotopului A_3 în momentul specificat la punctul a).
- c) timpul după care radioactivitatea izotopului A_2 atinge maximul său.

Rezolvare

Din oficiu

(2p)

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1 \Rightarrow N_1(t) = N_{01} e^{-\lambda_1 t} \quad (2p)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 \Rightarrow N_2(t) = \frac{\lambda_1 N_{01}}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}), \quad (3p) \quad 1.5$$

cu condiția inițială $N_{02} = 0$ la $t_0 = 0$.

$$\frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2 \Rightarrow N_3(t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 N_{01}}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1} - \frac{1 - e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2} \right), \quad (3p) \quad 1.5$$

cu condiția inițială $N_{03} = 0$ la $t_0 = 0$.

7. Din condiția problemei $N_3(t) = N_1(t)$ se obține ecuația:

$$e^{-2\lambda_1 t} - 3e^{-\lambda_1 t} + 1 = 0 \quad (2p) \quad 1$$

cu soluția $e^{-\lambda_1 t} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$, de unde se obține

$$t = 80,5320 \text{ zile.} \quad (2p) \quad 1$$

$$\frac{N_2(t)}{N_{01}} = e^{-\lambda_1 t} (1 - e^{-\lambda_1 t}) = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \left(1 - \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right) = 23,61\%. \quad (2p) \quad 1$$

Variantă. Se mai poate obține rezultatul la punctul b) din conservarea numărului de nucle:

$$N_{01} = 2N_1 + N_2 \Rightarrow N_2 = N_{01} - 2N_{01} e^{-\lambda_1 t} = N_{01} (1 - 2e^{-\lambda_1 t}), \quad (2p) \quad 1$$

de unde rezultă:

$$\frac{N_2}{N_{01}} = 1 - 2e^{-\lambda_1 t} = 23,6\%. \quad (2p) \quad 1$$

c)

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1 N_{01}}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) \quad (1p) \quad 0.5$$

Din condiția $\frac{dN_2}{dt} = 0$ se obține:

$$t^* = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_1} \cdot \ln 2 = T_1 = 58 \text{ zile.} \quad (3p) \quad 1.5$$